



Серия №7. Массы в массы!

5 июля

Теория

1. На плоскости даны точки A_1, A_2, \dots, A_n , каждой точке присвоено число m_1, m_2, \dots, m_n соответственно, причем $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$. От произвольной точки плоскости O отложим вектор $\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$. Докажите, что:

- положение точки Z не зависит от выбора точки O ;
- существует единственная точка O , для которой этот вектор нулевой.

Определение. Такая точка называется центром масс системы точек A_1, A_2, \dots, A_n . Числа m_1, \dots, m_n называются массами соответствующих точек.

- Выберем точки A_i, A_j такие, что $m_i + m_j \neq 0$. Найдите расположение их центра масс. Рассмотрите случаи с массами одного и разных знаков.
- Удалим из системы произвольный набор точек с ненулевой суммой масс, заменив их одной точкой, совпадающей с центром масс удаленных точек, и сопоставив ей сумму масс удаленных точек. Докажите, что центр масс всей системы точек не изменится.

Теорема о группировке масс. Положение центра масс не зависит от порядка группировки масс.

- Докажите, что если точку B_{ij} массой $m_i + m_j \neq 0$ заменить на две точки A_i и A_j (из задачи 2), то центр масс системы не изменится.
 - Докажите, что если точку B с массой 0 заменить на две точки A и A^* , совпадающие с B , присвоив им массы m и $-m$ соответственно, то центр масс системы не изменится.

Практика

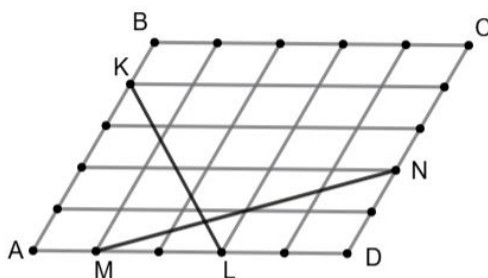
Основной метод. Если ввести несколько точек с массами и сгруппировать их так, чтобы получилось 2 точки, то центр масс всей системы будет лежать на прямой, проходящей через них. Сгруппировать в 2 другие точки – центр масс снова лежит на прямой, отличной от первой. Но центр масс единственный, значит, это их точка пересечения!

- Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1 . В каком отношении делит эта прямая медиану CC_1 ?

Задачи

- Из четырех точек A, B, C, D никакие три не лежат на одной прямой; M и N – середины отрезков AB и CD ; K – середина отрезка MN ; P – точка пересечения медиан треугольника BKD . Докажите, что точки A, K, P лежат на одной прямой.
- На сторонах AC и AB отмечены точки B_1 и C_1 такие, что $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC_1}{C_1B} = k$. Докажите, что медиана AA_1 , а также BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
 - Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
 - Две биссектрисы внешних углов треугольника и биссектриса третьего угла пересекаются в одной точке.

8. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и CD взяты точки M и N так, что $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{ND}$. Докажите, что центр масс треугольника AMN лежит на диагонали BD .
9. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке. В каком отношении они делятся точкой пересечения?
- 10.а) Поставьте в 3 вершины параллелограмма массы так, чтобы их центр масс оказался в четвёртой вершине.
 б) Поставьте в точки A, B, C, D целочисленные массы так, чтобы центр масс всей системы оказался пересечением отрезков KL и MN , и найдите отношения, в которых



эти отрезки делятся их точкой пересечения.

Указание: в точку C поставьте массу 0 и разгруппируйте (по пункту 4б).

Следующие 2 задачи принимаются исключительно через группировку масс.

11. **Теорема Менелая.** На сторонах BC , AC и продолжении стороны AB треугольника ABC отмечены точки K, L, M соответственно. Точки K, L, M коллинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CL}{LA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$.
12. **Теорема Гаусса.** В треугольнике ABC проведены чевианы AD и BE , которые пересекаются в точке P . Докажите, что середины отрезков AB, CP, DE лежат на одной прямой.
13. В треугольнике ABC проведены чевианы AD, BE, CF , которые пересекаются в точке P . Докажите, что три прямые Гаусса (для каждой пары чевиан) пересекаются в одной точке, лежащей на PM , где M – точка пересечения медиан треугольника ABC .